AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA W KRAKOWIE

WYDZIAŁ FIZYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ

JERZY CACHEL

ZADANIA
Z PRĘDKOŚCIĄ

KRAKÓW 2011

Zadanie 1

Rowerzyści podczas wycieczki rejestrowali swoją szybkość. Oblicz szybkości średnie każdego rowerzysty jeżeli:

a) rowerzysta A przez pierwszą godzinę jechał z prędkością 30km/h, a podczas drugiej na skutek zmęczenia jechał z prędkością 10km/h,

b) rowerzysta B pierwsze 20km jechał z prędkością 30km/h, a kolejne 20km z prędkością 10km/h,

c) rowerzysta C godzinę jechał z prędkością 30km/h, a następnie 20km z prędkością 10km/h.

a) $\text{dane}: t_1 = 1\,\text{h}, t_2 = 1\,\text{h}, v_1 = 30\,\text{km/h}, v_2 = 10\,\text{km/h}$

$$v_{śr.} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{30\,\text{km} + 10\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b) $\text{dane}: s_1 = 20\,\text{km}, s_2 = 20\,\text{km}, v_1 = 30\,\text{km/h}, v_2 = 10\,\text{km/h}$

$$v_{śr.} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{20\,\text{km} + 20\,\text{km}}{\frac{20\,\text{km}}{30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{20\,\text{km}}{10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}} = \frac{40\,\text{km}}{\frac{8}{3}\,\text{h}} = 15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

c) $\text{dane}: t_1 = 1\,\text{h}, s_2 = 20\,\text{km}, v_1 = 30\,\text{km/h}, v_2 = 10\,\text{km/h}$

$$v_{śr.} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{30\,\text{km} + 20\,\text{km}}{1\,\text{h} + \frac{20\,\text{km}}{10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}} = \frac{50\,\text{km}}{3\,\text{h}} = 16\frac{2}{3}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zadanie 2

Motocyklista odbył drogę z Myślenic do Krakowa ze średnią prędkością v_1, a z powrotem z Krakowa do Myślenic z przeciętną prędkością v_2. Obliczyć średnią prędkość jazdy motocyklisty na trasie Myślenice-Kraków-Myślenice.

$$v_1 = \frac{s}{t_1} \qquad v_2 = \frac{s}{t_2}$$

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Średnia prędkość jazdy v jest <u>średnią harmoniczną</u> obu prędkości v_1, v_2.

Zadanie 3

Połowę pewnej drogi samochód jechał z prędkością 60km/h, drugą połowę z prędkością średnią 90km/h. Z jaką prędkością przejechał całą drogę?

dane: $v_1 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$v_1 = \frac{s}{t_1} \qquad v_2 = \frac{s}{t_2}$$

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{150\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zadanie 4

Koń biegnący kłusem osiąga prędkość 5 m/s, a cwałem 8 m/s. Koń biegł kłusem przez 4 minuty, a następnie 2 minuty cwałował. Z jaką średnią prędkością biegł koń przez te 6 minut?

Wprowadźmy dane: $v_1 = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$t_1 = 240\,\text{s}$, $t_2 = 120\,\text{s}$

Wtedy dostajemy:

$$v_{śr.} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1t_1 + v_2t_2}{t_1 + t_2} = \frac{5 \cdot 240\,\text{m} + 8 \cdot 120\,\text{m}}{360\,\text{s}} = \frac{18}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zadanie 5

Rajdowiec miał do przejechania trzy odcinki specjalne, każdy tej samej długości. Odcinki te pokonał odpowiednio z prędkościami v_1, v_2, v_3. Jaka była średnia prędkość rajdowca na całej trasie?

Niech s oznacza długość odcinka specjalnego, a $t_i = \frac{s}{v_i}$ $(i = 1,2,3)$ - czasem przejazdu i –tego odcinka specjalnego.

Wtedy

$$v_{śr.} = \frac{3s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{3s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \frac{s}{v_3}} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$$

Zadanie 6

Statek przepłynął 40km z prądem rzeki w 2 godziny a 35km pod prąd w 2,5 godziny. Oblicz prędkość statku względem wody i prędkość prądu rzeki.

v – prędkość statku u – prędkość prądu rzeki

dane: $s_1 = 40\text{ km},\ s_2 = 35\text{ km}$

$t_1 = 2\text{ h},\ t_2 = 2{,}5\text{ h}$

$$\begin{cases} v + u = \frac{s_1}{t_1} \\ v - u = \frac{s_2}{t_2} \end{cases}$$

$$2v = \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2}$$

$$v = \frac{s_1 t_2 + t_1 s_2}{2t_1 t_2} = \frac{40\text{ km} \cdot 2{,}5\text{ h} + 2\text{ h} \cdot 35\text{ km}}{2 \cdot 2\text{ h} \cdot 2{,}5\text{ h}} = 17\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$u = \frac{s_1}{t_1} - v = \frac{40\text{ km}}{2\text{ h}} - 17\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Odp. $v = 17\text{ km/h}$

$u = 3\text{ km/h}$

Zadanie 7

Odległość między dwoma przystaniami na rzece wynosi 80km. Statek przepływa tę drogę w obie strony w ciągu 8 godzin i 20 minut. Obliczyć prędkość statku w wodzie stojącej, jeżeli woda w rzece płynie z prędkością 4km/h.

Dane: $d = 80\text{ km}, t = 8\frac{1}{3}\text{ h}, v_w = 4\text{ km/h}$

Niech v_s oznacza szukaną prędkość.

Wtedy $v_s + v_w$ – oznacza prędkość statku z prądem

$v_s - v_w$ – oznacza prędkość statku pod prąd

$$\frac{d}{v_s + v_w} + \frac{d}{v_s - v_w} = t$$

$$d(v_s - v_w) + d(v_s + v_w) = t\left(v_s^{\,2} - v_w^{\,2}\right)$$
$$tv_s^{\,2} - 2dv_s - tv_w^{\,2} = 0$$
$$\Delta = 4d^2 + 4t^2 v_w^{\,2}$$
$$v_s = \frac{2d \mp 2\sqrt{d^2 + (tv_w)^2}}{2t} = \frac{80 + \sqrt{80^2 + \left(\frac{100}{3}\right)^2}}{\frac{25}{3}} = \frac{80 + \frac{4}{3}\sqrt{400 \cdot 9 + 625}}{\frac{25}{3}} =$$
$$= \frac{240 + 4\sqrt{4225}}{25} = \frac{240 + 4 \cdot 65}{25} = 20$$

Odp. Szukana prędkość wynosi 20 km/h.

Zadanie 8

Łódź musi płynąć 60km w dół rzeki, a następnie 10km w górę rzeki. Prędkość prądu rzeki wynosi 5km/h. Jaka powinna być prędkość własna łodzi, aby cała podróż nie trwała dłużej niż 10 godzin?

$$\text{Dane}: \ s_1 = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ s_2 = 10\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ v_r = 5\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ t = 10\,\text{h}$$

Jeżeli przez v oznaczymy prędkość łodzi to otrzymujemy równania

$$s_1 = (v + v_r)t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{s_1}{v + v_r}$$
$$s_2 = (v - v_r)t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{s_2}{v - v_r}$$

gdzie t_1, t_2 to odpowiednio czasy podróży w dół i w górę rzeki.

Mamy zatem nierówność

$$t \ge t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v + v_r} + \frac{s_2}{v - v_r}$$

$$\frac{60}{v+5} + \frac{10}{v-5} \le 10$$
$$\frac{7v - 25}{v^2 - 25} \le 1$$
$$v^2 - 7v \ge 0$$
$$v \ge 7$$

Skorzystaliśmy z faktu, że $v > 5$ - inaczej statek nie popłynąłby w górę rzeki.

Odp. Co najmniej 7 km/h.

Zadanie 9

Po okręgu o długości 80m poruszają się 2 punkty ze stałą prędkością. Jeżeli kierunki ruchów są zgodne, to punkt pierwszy wyprzedza punkt drugi co 5 sekund. Jeżeli zaś kierunki ruchów są przeciwne, to punkty mijają się co 2 sekundy. Obliczyć prędkości tych punktów.

$\text{dane}: s = 80\,\text{m}, t_1 = 5\,\text{s}, t_2 = 2\,\text{s}$

Oznaczmy przez v i u szukane prędkości.

Wtedy

$$\begin{cases} t_1 v - t_1 u = s \\ t_2 v + t_2 u = s \end{cases} \qquad \begin{cases} v - u = \dfrac{s}{t_1} \\ v + u = \dfrac{s}{t_2} \end{cases}$$

$$2v = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}$$

$$v = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} = \frac{80\,\text{m}\,(5\,\text{s} + 2\,\text{s})}{2 \cdot 5\,\text{s} \cdot 2\,\text{s}} = 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u = \frac{s}{t_2} - v = \frac{80\,\text{m}}{2\ \text{s}} - 28\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odp. Szukane prędkości wynoszą 28 m/s i 12 m/s.

Zadanie 10

Po okręgu o długości 800m poruszają się dwa ciała. Pierwsze wykonuje pełny obrót o 5 sekund szybciej niż drugie. Gdyby te ciała poruszały się w tym samym kierunku, to spotkałyby się co 10 sekund. Oblicz prędkość każdego ciała.

v_1, v_2 - szukane prędkości ciał

t_1, t_2 - czas pełnego obrotu danych ciał

$\text{dane}: s = 800\,\text{m}, t_2 = t_1 + 5\,\text{s}, t = 10$

$tv_1 - tv_2 = s$

$$t_2 = t_1 + 5 \qquad v_1 = \frac{s}{t_1} \qquad v_2 = \frac{s}{t_2}$$

$$t \cdot \frac{s}{t_1} - t \cdot \frac{s}{t_2} = s$$

$$\frac{t}{t_2 - 5} - \frac{t}{t_2} = 1$$

$$t \cdot t_2 - t(t_2 - 5) = t_2(t_2 - 5)$$
$$t_2^{\,2} - 5t_2 - 5t = 0$$
$$\Delta = 25 + 20t$$
$$t_2 = \frac{5 + \sqrt{25 + 20t}}{2} = 10\,(\mathrm{s}) \qquad t_1 = 5\,\mathrm{s}$$
$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{800\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}} = 160\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{800\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = 80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zadanie 11

Prędkość własna pewnego samolotu wynosi *v*. Samolot ten leciał z miasta A do miasta B z wiatrem wiejącym z prędkością *u* ($u<v$), a następnie wracał do miasta A, lecąc pod wiatr, wiejący nadal z tą samą prędkością. Jak prędkość wiatru wpływa na łączny czas przelotu samolotu na trasie A-B-A?

Niech $|AB| = s$, t_1, t_2 - oznaczają odpowiednio czasy przelotu samolotu z A do B i z B do A.

Ponieważ $v+u$ jest prędkością samolotu z wiatrem, a $v-u$ – prędkością pod wiatr, więc mamy

$$t_1 = \frac{s}{v+u} \qquad \text{i} \qquad t_2 = \frac{s}{v-u}$$

Stąd $t_1 + t_2 = \dfrac{s}{v+u} + \dfrac{s}{v-u} = \dfrac{2sv}{v^2 - u^2}$.

Zatem im większa prędkość wiatru, tym czas przelotu na trasie A-B-A dłuższy. Natomiast najkrócej będziemy lecieć, gdy $u=0$, czyli przy bezwietrznej pogodzie.

Zadanie 12

Turysta odbył podróż kajakiem na trasie Kraków-Warszawa-Kraków. Część podróży z biegiem Wisły zajęła mu 4 dni, powrót – 5 dni. Ile dni płynie woda Wisły z Krakowa do Warszawy?

Oznaczmy:

v – prędkość kajaka na wodzie stojącej w km/dzień,

u – prędkość nurtu Wisły w km/dzień,

s – odległość Kraków-Warszawa wzdłuż Wisły w km

t_1, t_2 - czas podróży odpowiednio z biegiem Wisły i z powrotem

Zatem $v+u$ i $v-u$ oznaczają odpowiednio prędkość kajaka w dół i w górę Wisły.

Zgodnie z warunkami zadania mamy:

$$v + u = \frac{s}{t_1} \quad \text{i} \quad v - u = \frac{s}{t_2}$$

Stąd $2u = \frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2} = \frac{s(t_2 - t_1)}{t_1 t_2} = \frac{s}{20}$,

Zatem $\frac{s}{u} = 40$ jest liczbą dni, którą płynie woda Wisły z Krakowa do Warszawy.

Zadanie 13

Motocyklista drogę z miasta A do miasta B pokonał ze średnią prędkością 84 km/h.
Pokonanie drogi powrotnej zajęło mu o godzinę dłużej, a średnia prędkość wyniosła 56 km/h.
Oblicz odległość między miastami A i B.

Dane: $v_1 = 84\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ v_2 = 56\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ t_0 = 1\,\text{h}$,

Jeżeli przez t oznaczymy czas przejazdu motocyklisty z miasta A do miasta B, a przez s szukaną odległość między miastami A i B, to mamy układ równań

$$\begin{cases} v_1 t = s \\ v_2(t + t_0) = s \end{cases}$$

$$v_1 t = v_2(t + t_0)$$

$$t = \frac{v_2 t_0}{v_1 - v_2}$$

$$s = v_1 t = \frac{v_1 v_2 t_0}{v_1 - v_2} = \frac{84\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 56\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\,\text{h}}{84\,\frac{\text{km}}{\text{h}} - 56\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 84\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 2\,\text{h} = 168\,\text{km}$$

Odp. Odległość między miastami wynosi 168 km.

Zadanie 14

Marek pożyczył od taty samochód, którym wyruszył z domu na spotkanie ze swoją dziewczyną. Przed wyjazdem obliczył, że jadąc ze średnią prędkością 60 km/h przybędzie na spotkanie dokładnie o umówionej godzinie. Po przejechaniu z zaplanowaną prędkością 60% drogi zepsuł się samochód. Naprawa samochodu zajęła mu 16 minut. Teraz, aby zdążyć na spotkanie, musiałby jechać z prędkością 120 km/h. Oblicz odległość od domu Marka do miejsca spotkania z ukochaną.

Niech s oznacza szukaną odległość a t – planowany czas przejazdu.

Z obliczeń Marka wynika, że $s=60t$.

Z treści zadania wynika ponadto

$$t=\frac{0{,}6s}{60}+\frac{16}{60}+\frac{0{,}4s}{120}$$

$$t=\frac{s}{100}+\frac{4}{15}+\frac{s}{300}$$

Z porównania t otrzymujemy

$$\frac{s}{60}=\frac{s}{100}+\frac{4}{15}+\frac{s}{300}$$

$$s=80$$

Odp. Szukana odległość wynosi 80 km.

Zadanie 15

W biegu narciarskim na 30 km różnica czasów między zwycięzcą i ostatnim zawodnikiem była równa 20 minut. Po biegu obliczono, że średnia prędkość zwycięzcy była o 3 km/h większa od prędkości ostatniego biegacza. Oblicz prędkość zwycięzcy.

Jeżeli oznaczymy średnią prędkość zwycięzcy przez v, to ostatni zawodnik biegł z prędkością $v-3$. Zatem całą trasę przebiegli odpowiednio w czasie $\frac{30}{v}$ oraz $\frac{30}{v-3}$ godzin. Dostajemy zatem równanie:

$$\frac{30}{v}=\frac{30}{v-3}-\frac{1}{3}$$

$$90(v-3)=90v-v(v-3)$$

$$v^2-3v-270=0$$

$$\Delta=33^2$$

$$v=\frac{3+33}{2}=18$$

Czyli $v=18\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zadanie 16

W biegu motocyklowym zawodnik, który zwyciężył, przejechał trasę z prędkością o 20 km/h większą niż drugi zawodnik i o 25 km/h większą od trzeciego zawodnika. Zawodnicy wystartowali jednocześnie. Na mecie drugi zawodnik był o 18 minut później niż zwycięzca i o 6 minut wcześniej niż trzeci zawodnik.

Oblicz: a) długość trasy rajdu,

b) prędkość jazdy każdego zawodnika,

c) czasy przejazdu tych zawodników.

a) Niech v będzie prędkością najwolniejszego zawodnika, s długością trasy, t czasem w jakim najwolniejszy zawodnik pokonał całą trasę.

Wtedy $v, v+5, v+25$ - prędkości zawodników,

$t, t-6, t-24$ - czasy (w minutach) zawodników,

$t, t-0{,}1, t-0{,}4$ - czasy (w godzinach) zawodników.

Dostajemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} vt = s \\ (v+5)(t-0{,}1) = s \\ (v+25)(t-0{,}4) = s \end{cases}$$

Skąd mamy

$$\begin{cases} vt = s \\ vt + 5t - 0{,}1v - 0{,}5 = s \\ vt + 25t - 0{,}4v - 10 = s \end{cases} \qquad \begin{cases} 5t - 0{,}1v - 0{,}5 = 0 \\ 25t - 0{,}4v - 10 = 0 \end{cases}$$

$t = 1{,}6$ h

$v = 75$ km/h

$s = 120$ km

b) Z poprzedniego podpunktu dostajemy prędkości: 75 km/h, 80 km/h, 100 km/h.

c) Czasy wynoszą 1,6 h, 1,5 h, 1,2 h.

<u>Zadanie 17</u>

Trasa rowerowa wokół jeziora ma długość 15 km. Dwóch rowerzystów wyrusza z tego samego miejsca i okrąża jezioro poruszając się w tym samym kierunku. Średnia prędkość drugiego z nich jest większa od średniej prędkości pierwszego o 5 km/h. Oblicz po jakim czasie dojdzie do ponownego spotkania rowerzystów.

Oznaczmy przez v prędkość pierwszego rowerzysty. Jeżeli rowerzyści spotkają się po czasie t, to pierwszy rowerzysta przejedzie w tym czasie vt, a drugi $(v+5)t$ kilometrów. Skoro to ma być moment spotkania, to druga z tych liczb musi być większa od pierwszej o długość toru. Daje to nam równanie:

$(v+5)t = vt + 15$

$t = 3$

Odp. Po 3 godzinach dojdzie do ponownego spotkania.

Zadanie 18

Po torze wodnym o długości 10 km pływają w kółko dwie łodzie motorowe, przy czym druga z nich płynie z prędkością o 5 km/h większą od prędkości pierwszej łodzi. Łodzie te wystartowały z tego samego punktu i ponownie spotkały się, gdy pierwsza z łodzi wykonała pełne 3 okrążenia toru. Oblicz prędkości obu łodzi.

Czas jaki upływa między kolejnymi spotkaniami łodzi to dokładnie czas, w którym druga łódź przepłynie o 10km więcej od pierwszej łodzi.
Jeżeli oznaczymy przez *v* prędkość pierwszej łodzi to dostajemy układ równań

$$\begin{cases} vt = 30 \\ (v+5)t = 40 \end{cases}$$

$$vt + 5t = 40$$
$$30 + 5t = 40$$
$$t = 2$$
$$v = \frac{30}{2} = 15$$

Odp. Prędkości obu łodzi wynoszą 15 km/h i 20 km/h.

Zadanie 19

Pomiędzy miastami A i B kursuje autobus. Droga między tymi miastami prowadzi przez wzgórze. Autobus jadąc pod górę rozwija prędkość 25 km/h, a z góry 50 km/h. Podróż z A do B trwa 3,5 h, a z B do A 4 h. Jaka jest odległość z miasta A do miasta B?

$$\text{Dane}: v_1 = 25\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ v_2 = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}},\ t_1 = 3{,}5\,\text{h},\ t_2 = 4\,\text{h}$$

Oznaczmy przez *x* długość drogi od A do szczytu, a przez *y* od szczytu wzgórza do B. Wtedy dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{v_1} + \dfrac{y}{v_2} = t_1 \\ \dfrac{y}{v_1} + \dfrac{x}{v_2} = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 x + v_2 y = t_1 v_1 v_2 \\ v_2 y + v_1 x = t_2 v_1 v_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{t_1 v_1 v_2 - v_1 y}{v_2}$$

$$v_2 y + t_1 v_1^2 - \frac{v_1^2}{v_2^2} y = t_2 v_1 v_2$$

$$y = \frac{t_2 v_1 v_2 - t_1 v_1^2}{v_2 - \dfrac{v_1^2}{v^2}} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{t_2 v_2 - t_1 v_1}{1 - \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^2} = \frac{25}{50} \cdot \frac{4 \cdot 50 - 3{,}5 \cdot 25}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25(8 - 3{,}5)}{\dfrac{3}{4}} = 75$$

$$x = \frac{3{,}5 \cdot 25 \cdot 50 - 25 \cdot 75}{50} = \frac{25(50 \cdot 3{,}5 - 75)}{50} = 50$$

$y = 75, x = 50$

Odp. Szukana odległość wynosi 125 km.

<u>Zadanie 20</u>

Samochód wyrusza z punktu P w południe z prędkością 90 km/h. O której godzinie dogoni rowerzystę, który wyruszył o siódmej rano i jedzie z prędkością 15 km/h?

Oznaczmy przez *t* czas spotkania. Rowerzysta do godziny 12.00 pokonał 75 km.

$75 + 15t = 90t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

Samochód dogoni rowerzystę o godzinie 13.00

Zadanie ma interpretację geometryczną.

Niech $s_1(t) = 90(t-5)$, $s_2(t) = 15t$.

Jeżeli narysujemy wykresy funkcji s_1, s_2, czyli wykresy pokonywanej drogi w zależności od czasu, to miejsce i czas spotkania odpowiada punktowi wspólnemu tych wykresów.

$s_1(t) = s_2(t) \Leftrightarrow 90(t-5) = 15t \Leftrightarrow t = 6$

<u>Zadanie 21</u>

Pociąg osobowy mija obserwatora w ciągu 5 s, a obok peronu długości 300 m przejeżdża w ciągu 25 s.

a) Oblicz długość pociągu i jego prędkość.
b) Oblicz, jak długo pociąg będzie mijał pociąg towarowy długości 150 m jadący równoległym torem w przeciwnym kierunku z prędkością 36 km/h?

a) Oznaczmy przez *d* – długość pociągu, a przez *v* jego prędkość.

$\text{dane}: t_1 = 5\,\text{s}, t_2 = 25\,\text{s}, l = 300\,\text{m}$

Wtedy

$$\begin{cases} d = t_1 v \\ d + l = t_2 v \end{cases}$$

$$vt_1 + l = t_2 v \qquad v = \frac{l}{t_2 - t_1} = \frac{300\,\text{m}}{20\,\text{s}} = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad d = 5\,\text{s} \cdot 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 75\,\text{m}$$

b) dane : $l_1 = 150\,\text{m}$ $\quad v_1 = 36\,\text{km/h} = 36 \cdot \dfrac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 10\,\text{m/s}$

$$t = \frac{l_1 + d}{v + v_1} = \frac{150\,\text{m} + 75\,\text{m}}{15\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 9\,\text{s}$$

Zadanie 22

Z dwóch miejscowości jadą naprzeciw siebie dwa pociągi: jeden długości 100 m z prędkością 36 km/h, drugi długości 150 m z prędkością 54 km/h. Obliczyć czas mijania tych pociągów.

Wprowadźmy dane: $v_1 = 36\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}},\ v_2 = 54\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

$l_1 = 100\,\text{m},\ l_2 = 150\,\text{m}$

Wtedy otrzymujemy:

$$t = \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{100\,\text{m} + 150\,\text{m}}{90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{250\,\text{m}}{90 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}}} = \frac{250\,\text{m}}{\frac{900\,\text{m}}{36\,\text{s}}} = \frac{25 \cdot 36\,\text{s}}{90} = 10\,\text{s}$$

Zadanie 23

Z miasta A wyrusza pociąg z prędkością 60 km/h, z miasta B wyrusza pociąg z prędkością 40 km/h. Odległość między miastami wynosi 12 km. Po jakim czasie i w jakiej odległości od miast spotkają się te pociągi?

Dane : $v_1 = 60\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}},\ v_2 = 40\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}},\ s = 12\,\text{km}$

Niech t – oznacza czas spotkania

s_1, s_2 - przebyte drogi pociągów wyruszających odpowiednio z miast A i B

Wtedy dostajemy:

$$t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2}$$

$$\begin{cases} v_2 s_1 = v_1 s_2 \\ s_1 + s_2 = s \end{cases}$$

$$s_1 = s - s_2$$
$$v_2(s - s_2) = v_1 s_2$$
$$v_2 s - v_2 s_2 = v_1 s_2$$

$$s_2 = \frac{v_2 s}{v_1 + v_2} = \frac{40\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 12\ \text{km}}{100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 4{,}8\ \text{km}$$

$$s_1 = s - s_2 = 7{,}2\ \text{km}$$

$$t = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4{,}8\ \text{km}}{40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{0{,}6}{5}\ \text{h} = \frac{3}{25}\ \text{h}$$

Zadanie 24

Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 540 km.
Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą. Pociągi te minęły się w połowie drogi.
Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Sposób 1

Oznaczmy przez v – prędkość pierwszego pociągu,

t – czas w jakim przejechał on połowę drogi

Mamy zatem

$vt = 270$

O drugim pociągu wiemy, że jechał z prędkością $v+9$ oraz że połowę drogi przejechał w czasie $t-1$. Stąd

$(v+9)(t-1) = 270$

Czyli $vt + 9t - v - 9 = 270$. Ponieważ $vt = 270$, to dostajemy

$9t - v - 9 = 0 \Rightarrow v = 9t - 9$

$(9t-9)t = 270$

$t^2 - t - 30 = 0$

$t = \frac{1+11}{2} = 6 \qquad v = 9t - 9 = 45$

Pociągi jechały z prędkością: 45 km/h i 54 km/h.

Sposób 2

Jeżeli przez v oznaczymy prędkość pierwszego pociągu, to połowę drogi przebył on w czasie $\frac{270}{v}$. Drugi pociąg dotarł do połowy drogi po czasie $\frac{270}{v+9} + 1$.

Mamy więc równanie:

$$\frac{270}{v} = \frac{270}{v+9} + 1$$

$$270(v+9) = 270v + v(v+9)$$

$$v^2 + 9v = 2430 = 0$$

$$\Delta = 99^2$$

$$v = \frac{-9+99}{2} = 45$$

<u>Zadanie 25</u>

Dwa pociągi: towarowy o długości 490 m i osobowy o długości 210 m, jadą naprzeciw siebie po dwóch równoległych torach i spotykają się w punkcie S. Mijanie się pociągów trwa 20 s, a czas przejazdu pociągu osobowego przez miejsce S jest o 25 sekund krótszy od czasu przejazdu pociągu towarowego. Oblicz prędkości obu pociągów, zakładając, że poruszają się ruchem jednostajnym.

$\text{Dane}: l_1 = 490\,\text{m}, l_2 = 210\,\text{m}, t = 20\,\text{s}, \Delta t = 25\,\text{s}$

Oznaczmy przez v_1 – prędkość pierwszego pociągu, v_2 – prędkość drugiego pociągu.

Mijając się, każdy z pociągów pokonuje dystans równy sumie ich długości. Dostajemy zatem równanie $t(v_1 + v_2) = l_1 + l_2$.

Czas przejazdu pierwszego pociągu przez punkt S to $\frac{l_1}{v_1}$, a czas przejazdu drugiego pociągu to $\frac{l_2}{v_2}$. Daje nam to drugie równanie

$$\frac{l_1}{v_1} = \frac{l_2}{v_2} + \Delta t .$$

Podstawiając dane rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \dfrac{700}{20} \\ \dfrac{490}{v_1} = \dfrac{210}{v_2} + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 35 \\ 98v_2 = 42v_1 + 5v_1v_2 \end{cases}$$

$v_1 = 35 - v_2$

$98v_2 = 42(35 - v_2) + 5(35 - v_2)v_2$

${v_2}^2 - 7v_2 - 294 = 0$

$\Delta = 35^2 \qquad y = \frac{7+35}{2} = 21 \qquad x = 35 - y = 14$

Odp. Prędkości pociągów wynoszą $14\frac{\text{m}}{\text{s}}, 21\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

<u>Zadanie 26</u>

Z miejscowości A i B oddalonych od siebie o 182 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Rowerzysta jadący z miejscowości B do miejscowości A jedzie ze średnią prędkością mniejszą od 25 km/h. Rowerzysta jadący z miejscowości A do miejscowości B wyjeżdża o 1 godzinę wcześniej i jedzie ze średnią prędkością o 7 km/h większą od średniej prędkości drugiego rowerzysty. Rowerzyści spotkali się w takim miejscu, że rowerzysta jadący z miejscowości A przebył do tego miejsca $\frac{9}{13}$ całej drogi z A do B. Z jakimi średnimi prędkościami jechali obaj rowerzyści?

Punkt spotkania rowerzystów jest oddalony od miejscowości A o $\frac{9}{13} \cdot 182 = 126$ kilometrów. Jeżeli oznaczymy średnią prędkość rowerzysty jadącego z A do B przez *v*, a czas w godzinach, po jakim spotkał się z drugim rowerzystą przez *t*, to z danych zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} vt = 126 \\ (v-7)(t-1) = 182 - 126 = 56 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie dostajemy

$vt - 7t - v + 7 = 56$

$126 - 7t - v + 7 = 56$

$77 - 7t = v$

Podstawiając otrzymaną zależność do równania pierwszego mamy

$(77 - 7t)t = 126$

$t^2 - 11t + 18 = 0 \qquad \Delta = 49$

$t_1 = \frac{11-7}{2} = 2 \quad t_2 = \frac{11+7}{2} = 9$

$v_1 = \frac{126}{2} = 63 > 32 \quad v_2 = \frac{126}{9} = 14$

Odp. Prędkości rowerzystów wyniosły 14 km/h i 7 km/h.

Zadanie 27

Dwa samochody odbyły podróż z miejscowości A do odległej o 480 km miejscowości B. Drugi z samochodów jechał ze średnią prędkością większą o 20 km/h od średniej prędkości pierwszego samochodu, a czas przejazdu pierwszego samochodu był o 72 minuty dłuższy od czasu przejazdu drugiego samochodu. Oblicz ile czasu zajęła podróż każdemu z samochodów.

Jeżeli oznaczymy średnią prędkość pierwszego samochodu przez *v*, a jego czas przejazdu przez *t*, to dostajemy układ równań

$$\begin{cases} vt = 480 \\ (v+20)\left(t - \frac{72}{60}\right) = 480 \end{cases}$$

$$\begin{cases} vt = 480 \\ vt + 20t - \frac{6}{5}v - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} vt = 480 \\ 20t - \frac{6}{5}v - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{50}{3}t - 20 \end{cases}$$

$$\left(\frac{50}{3}t - 20\right)t = 480$$

$$\frac{5}{3}t^2 - 2t - 48 = 0$$

$$\Delta = 324$$

$$t = \frac{2+18}{\frac{10}{3}} = 6$$

Odp. Czas podróży pierwszego samochodu wynosił 6 godzin a drugiego 4 godziny i 48 minut.

Zadanie 28

Turysta Nowak wyrusza z miasta A do miasta B, w tym samym czasie turysta Kowalski wyrusza z miasta B do miasta A i po pewnym czasie spotykają się. W momencie spotkania turysta Nowak miał do miasta B jeszcze 40 minut marszu, zaś turystę Kowalskiego czekało jeszcze 90 minut marszu do miasta A. Ile trwała podróż każdego z turystów?

Niech $|AB| = s$, zaś *t* – oznacza czas w minutach, który upłynął od momentu wyruszenia turystów do chwili ich spotkania.

Niech ponadto u i v oznaczają odpowiednio prędkości marszu turystów Nowaka i Kowalskiego.

Wówczas $ut + vt = s$ (*)

Ponadto $u(t+40) = s$
$v(t+90) = s$

Zatem $u = \dfrac{s}{t+40}$ $v = \dfrac{s}{t+90}$

Po podstawieniu wyznaczonych u i v do równania (*) otrzymujemy

$$\frac{s}{t+40}\cdot t + \frac{s}{t+90}\cdot t = s$$

$$\frac{t}{t+40} + \frac{t}{t+90} = 1$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$t^2 = 3600$, czyli $t = 60$

Wobec powyższego marsz turysty Nowaka trwał 60+40=100 minut, zaś marsz turysty Kowalskiego trwał 60+90=150 minut.

Zadanie 29

Karawana o długości 1 km jedzie przez pustynię z prędkością 4 km/h. Co jakiś czas od czoła karawany do jej końca i z powrotem jedzie goniec z prędkością 6 km/h. Oblicz długość drogi tam i z powrotem, którą pokonuje goniec. Oblicz, ile czasu zajmuje mu przebycie tej drogi.

Oznaczmy:

v – prędkość gońca

t – czas, w ciągu którego posłaniec jedzie ku końcowi karawany

T – czas, w ciągu którego posłaniec jedzie od końca karawany ku jej przodowi

Dane: $v = 6$ km/h, $v_1 = 4$ km/h, $d = 1$ km

Zauważmy, że jadąc ku końcowi karawany posłaniec przebywa drogę długości vt km, o $v_1 t$ krótszą niż długość karawany.

$$vt + v_1 t = d \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v+v_1} = \frac{1}{10}\text{ h}$$

Zauważmy, że w drodze powrotnej posłaniec przebywa drogę długości vT km, o $v_1 T$ km dłuższą niż długość karawany.

$$vT - v_1 T = d \quad \Rightarrow \quad T = \frac{d}{v - v_1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{h}$$

Obliczamy czas, w ciągu którego posłaniec pokonuje drogę tam i z powrotem:

$$t + T = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}\ (\mathrm{h}) \qquad \frac{3}{5}\,\mathrm{h} = 36\,\mathrm{min}$$

Obliczamy długość pokonywanej przez posłańca drogi:

$$s = (t + T)\cdot v = \frac{3}{5}\,\mathrm{h}\cdot 6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 3{,}6\,\mathrm{km}$$

Zadanie 30

Kolumna wojska ma długość 80 m i porusza się względem szosy z prędkością 7,2 km/h. Dowódca z końca kolumny wysyła gońca do czoła kolumny z meldunkiem. Goniec wraca po czasie 30 s. Jaka była prędkość gońca względem szosy?

Wprowadźmy oznaczenia:

$$v_1 = 7{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{7{,}2\cdot 1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{72}{36}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad d = 80\,\mathrm{m} \qquad t = 30\,\mathrm{s}$$

v - szukana prędkość gońca względem szosy

Wtedy:

$$t = \frac{d}{v - v_1} + \frac{d}{v + v_1}$$

Czyli:

$$d(v + v_1) + d(v - v_2) = t\left(v^2 - v_1^{\,2}\right)$$

$$tv^2 - 2dv - tv_1^{\,2} = 0$$

$$\Delta = 4d^2 + 4t^2 v_1^{\,2}$$

$$v = \frac{d + \sqrt{d^2 + t^2 v_1^{\,2}}}{t} = \frac{80 + \sqrt{10000}}{30} = 6$$

$$6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{6\cdot 0{,}001\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = \frac{6\cdot 3600\,\mathrm{km}}{1000\,\mathrm{h}} = 21{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Odp. Prędkość gońca wynosiła 21,6 km/h.

Zadanie 31

Po zelektryfikowaniu linii kolejowej prędkość pociągów osobowych zwiększyła się o 10 km/h, a czas jazdy na trasie o długości 200 km zmniejszył się o 1 h.
W ciągu ilu godzin pociąg przebiega trasę 200 km po zelektryfikowaniu linii?

Niech

v – prędkość pociągu przed zelektryfikowaniem

t – czas przejazdu 200km przed zelektryfikowaniem

Wtedy

$$\begin{cases} v \cdot t = 200 \\ (v+10)(t-1) = 200 \end{cases}$$

Zatem

$$v = \frac{200}{t}$$

$$\left(\frac{200}{t} + 10\right)(t-1) = 200$$

$$10t - \frac{200}{t} - 10 = 0$$

$$10t^2 - 10t - 200 = 0$$

$$t^2 - t - 20 = 0$$

$$\Delta = 81 \qquad t = \frac{1+9}{2} = 5$$

<u>Zadanie 32</u> ***<u>(Egzamin maturalny z matematyki, 2011)</u>***

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza liczbę dni wędrówki, y – liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę.

$$\begin{cases} xy = 112 \\ (x+3)(y-12) = 112 \end{cases}$$

$y = \frac{112}{x}$ $(x+3)\left(\frac{112}{x} - 12\right) = 112$ $x^2 + 3x - 28 = 0$ $\Delta = 121$ $x = \frac{-3+11}{2} = 4$ $y = \frac{112}{4} = 28$	$x = \frac{112}{y}$ $\left(\frac{112}{y} + 3\right)(y-12) = 112$ $y^2 - 12y - 448 = 0$ $\Delta = 44^2$ $y = \frac{12+44}{2} = 28$ $x = \frac{112}{28} = 4$

Odp.: Turysta przechodził dziennie 28 km.

II sposób rozwiązania

Niech *x* oznacza liczbę dni wędrówki, *y* – liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę. Liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę opisujemy równaniem

$$y = \frac{112}{x}$$

Turysta może przeznaczyć na wędrówkę o 3 dni więcej, idąc każdego dnia o 12 km mniej, wówczas zapisujemy równanie:

$$\frac{112}{x} = \frac{112}{x+3} + 12$$

Przekształcamy to równanie do postaci $x^2 + 3x - 28 = 0$.

<u>Zadanie 33 *(Egzamin maturalny z matematyki, 2007)*</u>

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

$$\text{Dane}: v_0 = 10\ \text{km/h}, t_0 = \frac{1}{2}\ \text{h}, s = 210\ \text{km}$$

Sposób 1

Wprowadźmy oznaczenia:
v – średnia prędkość samochodu,

$\frac{s}{v}$ – czas, w którym samochód przebył drogę ze średnią prędkością *v*,

$\frac{s}{v+v_0}$ – czas, w którym samochód przebył drogę ze średnią prędkością $v + v_0$.

Warunki zadania zapisujemy za pomocą równania:

$\frac{s}{v} - \frac{s}{v+v} = t_0$, czyli

$$\frac{210}{v} - \frac{210}{v+10} = \frac{1}{2}$$

które po przekształceniu przyjmuje postać:

$$v^2 + 10v - 4200 = 0$$

Rozwiązaniem równania są liczby: $v_1 = 60, v_2 = -70$.

Odrzucamy rozwiązanie ujemne, które jest niezgodne z warunkami zadania.

Odpowiedź: Samochód jechał ze średnią prędkością 60 km/h.

Sposób 2

$$\begin{cases} vt = s \\ (v + v_0)(t - t_0) = s \end{cases}$$

$$\begin{cases} vt = 210 \\ (v + 10)\left(t - \frac{1}{2}\right) = 210 \end{cases}$$

Jeżeli $t = \frac{210}{v}$, to

$$(v + 10)\left(\frac{210}{v} - \frac{1}{2}\right) = 210$$

$$v^2 + 10v - 4200 = 0$$

$$\frac{1}{2}v^2 + 5v - 2100 = 0$$

$$\Delta = 65^2$$

$$v = -5 + 65 = 60$$

Zadanie 34 ***(Egzamin próbny maturalny z matematyki, 2010)***

Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 km/h mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania.
Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

I sposób rozwiązania

Niech *v* oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta B i niech *t* oznacza czas od chwili wyjazdu tego samochodu do chwili spotkania.
Obliczamy, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.
Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} v \cdot t = 300 \\ (v - 17)(t - 1) = 174 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie uwzględniając warunek $v \cdot t = 300$ otrzymujemy:
$v = 143 - 17t$
Otrzymaną wartość *v* podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy:
$17t^2 - 143t + 300 = 0$
Rozwiązaniami tego równania są liczby:

$$t_1 = \frac{75}{17} = 4\frac{7}{17} \qquad t_2 = 4$$

Stąd $v_1 = 68, v_2 = 75$.

Odpowiedź: pierwsze rozwiązanie: $v_A = 51$ km/h, $v_B = 68$ km/h drugie rozwiązanie: $v_A = 58\,\text{km/h}, v_B = 75\,\text{km/h}$

gdzie v_A oznacza prędkość samochodu jadącego z miasta A, a v_B oznacza prędkość samochodu jadącego z miasta B.

Uwaga.
Możemy otrzymać inne równania kwadratowe z jedną niewiadomą:
$17t_A^{\ 2} - 109t_A + 174 = 0$, lub $v_A^{\ 2} - 109v_A + 2958 = 0$ lub $v_B^{\ 2} - 143v_B + 5100 = 0$

II sposób rozwiązania
Niech v_A oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, zaś v_B oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta B oraz niech t oznacza czas od chwili wyjazdu samochodu z miasta B do chwili spotkania samochodów.
Obliczamy, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A:

174 km.

Zapisujemy równania: $v_A = \frac{174}{t-1}$ $\quad v_B = \frac{300}{t}$

wówczas otrzymujemy równanie $\frac{174}{t-1} + 17 = \frac{300}{t}$.

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego $17t^2 - 143t + 300 = 0$.

III sposób rozwiązania
Niech v_A oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, zaś v_B oznacza średnią prędkość samochodu.

Wiedząc, że pierwszy samochód wyruszył o godzinę później niż drugi samochód otrzymujemy równanie:

$$\frac{174}{v_A} + 1 = \frac{300}{v_B}$$

Czyli $174v_B + v_A v_B = 300v_A$. (*)

Wiemy także, że $v_A = v_B - 17$, co po podstawieniu do równania (*) daje

$$174v_B + (v_B - 17)v_B = 300(v_B - 17)$$
$$v_B^{\ 2} - 143v_B + 5100 = 0$$
$$\Delta = 49$$
$$v_B = \frac{143-7}{2} = 68 \quad \vee \quad v_B = \frac{143+7}{2} = 75$$
$$v_A = 51 \text{ lub } v_A = 58$$

Zadanie 35

Zwiększywszy prędkość pociągu o 10 km/h zyskuje się 40 minut na trasie. Jeśli jednak prędkość zostanie zmniejszona o 10 km/h, traci się 1 godzinę. Jaka jest długość trasy?

Niech

v – prędkość pociągu, s – długość trasy

Wtedy

$$\begin{cases} \frac{s}{v} - \frac{s}{v+10} = \frac{2}{3} \\ \frac{s}{v-10} - \frac{s}{v} = 1 \end{cases}$$

Stąd

$$s(v+10) - sv = \frac{2}{3}v(v+10)$$

$$s = \frac{2}{30}v(v+10)$$

$$\frac{\frac{2}{30}v(v+10)}{v-10} - \frac{2}{30}\frac{v(v+10)}{v} = 1$$

$$\frac{v(v+10)}{v-10} - (v+10) = 15$$

$$v(v+10) - v^2 + 100 = 15(v-10)$$

$$5v = 25$$

$$v = 50$$

$$s = \frac{1}{15} \cdot 50 \cdot 60 = 200$$

Odp. Długość trasy wynosi 200 km.

Zadanie 36 ***(Egzamin maturalny z fizyki, 2008)***

Rowerzysta pokonuje drogę o długości 4 km w trzech etapach, o których informacje przedstawiono w tabeli. Przez *d* oznaczono całą długość drogi przebytej przez rowerzystę.

Przebyta droga		Wartość prędkości średniej w kolejnych etapach w m/s
etap I	0,25d	10
etap II	0,50d	5
etap III	0,25d	10

Oblicz całkowity czas jazdy rowerzysty.

Niech $t = t_1 + t_2 + t_3$

Z danych z tabeli dostajemy $s_1 = 1000\ \mathrm{m}, s_2 = 2000\ \mathrm{m}, s_3 = 1000\ \mathrm{m}$

Zatem

$$t_1 = \frac{1000\ \mathrm{m}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 100s \qquad t_2 = \frac{2000\ \mathrm{m}}{5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 400\ \mathrm{s} \qquad t_3 = \frac{1000\ \mathrm{m}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 100\ \mathrm{s}$$

$$t = 100\ \mathrm{s} + 400\ \mathrm{s} + 100\ \mathrm{s} = 600\ \mathrm{s}$$

Zadanie 37 *(Egzamin maturalny z fizyki, 2005)*
Po rzece, której nurt ma prędkość 1 m/s, płynie pod prąd motorówka. Wartość prędkości motorówki względem wody wynosi 3 m/s. Oblicz, ile sekund będzie trwał rejs motorówką między przystaniami odległymi od siebie o 2000 m.

Wyznaczamy wartość v prędkości motorówki względem brzegu

$$v = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Obliczamy czas ruchu motorówki

$$t = \frac{s}{v} = 1000\ \mathrm{s}$$

Zadanie 38 *(Egzamin maturalny z fizyki, 2009)*
Samochód porusza się po prostoliniowym odcinku autostrady. Drogę przebytą przez samochód opisuje równanie: $s = 15t + 1{,}5t^2$ (w układzie SI z pominięciem jednostek).

Ile wynoszą wartości prędkości początkowej i przyspieszenia tego samochodu?

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Odp. $v_0 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $\quad a = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Zadanie 39 *(Egzamin maturalny z fizyki, 2007)*
Dwaj rowerzyści poruszając się w kierunkach wzajemnie prostopadłych oddalają się od siebie z prędkością względną o wartości 5 m/s. Wartość prędkości jednego z nich jest równa 4 m/s. Ile wynosi zatem wartość prędkości drugiego rowerzysty?

Odp. $3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Zadanie 40 ***(Egzamin maturalny z fizyki, 2007)***
Samochód rusza z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem o wartości 3 $\frac{m}{s^2}$ i porusza się po prostoliniowym, poziomym odcinku autostrady. Oblicz wartość prędkości średniej samochodu po pierwszych czterech sekundach ruchu.

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} \\ s &= \frac{at^2}{2} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad v = \frac{at^2}{2t} = \frac{at}{2} = \frac{3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 4\,\mathrm{s}}{2} = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zadanie 41 ***(Egzamin maturalny z fizyki, 2007)***
Lokomotywa manewrowa pchnęła wagon o masie 40 ton nadając mu początkową prędkość o wartości 5 m/s. Wagon poruszając się ruchem jednostajnie opóźnionym zatrzymał się po upływie 20 s. Oblicz wartość siły hamującej wagon.

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ a &= \frac{F}{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = 40\cdot 10^3\ \mathrm{kg}\cdot\frac{5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{20\,\mathrm{s}} = 10^4\ \mathrm{N}$$

Zadanie 42 ***(Egzamin maturalny z fizyki, 2007)***
Gimnastyczka wyrzuciła pionowo w górę piłkę z prędkością o wartości 4 m/s. Piłka w momencie wyrzucania znajdowała się na wysokości 1 m licząc od podłogi. Oblicz wartość prędkości, z jaką piłka uderzy o podłogę. Załóż, że na piłkę nie działa siła oporu.

$$E_{k_0} + E_{p_0} = E_k \Rightarrow \frac{mv_0^{\ 2}}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v^2 = v_0^{\ 2} + 2gh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^{\ 2} + 2gh}$$

$$v = \sqrt{16\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 2\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1\,\mathrm{m}} = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zadanie 43 ***(Egzamin próbny maturalny z fizyki, 2006)***
Dwaj kolarze zbliżali się do mety, jadąc jeden obok drugiego ruchem jednostajnym z prędkością 15 m/s. W odległości 100 m od mety jeden z nich przyspieszył i jadąc ruchem jednostajnie przyspieszonym po sześciu sekundach minął metę. W jakiej odległości od mety znajdował się wówczas drugi kolarz jadący do końca z niezmienną prędkością?

$$s = vt = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 6\,\mathrm{s} = 90\,\mathrm{m}$$

Odp. 10m

<u>Zadanie 44 *(Egzamin próbny maturalny z fizyki, 2006)*</u>

Dwie rakiety poruszają się wzdłuż tej samej prostej naprzeciw siebie z prędkościami (względem pewnego inercjalnego układu odniesienia) o wartościach $v_1 = 0{,}3c$ i $v_2 = 0{,}3c$. Względną prędkość rakiet można obliczyć w sposób relatywistyczny, korzystając z równania

$v' = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c}}$ lub klasyczny.

a) Oblicz w sposób klasyczny i relatywistyczny wartość prędkości względnej obu rakiet.

b) Zapisz, jak zmieni się stosunek prędkości względnej obliczonej w sposób relatywistyczny do wartości prędkości obliczonej w sposób klasyczny, jeśli wartości prędkości rakiet zostaną zwiększone.

a) Obliczenie prędkości względnej klasycznie:

$$v = v_1 + v_2 = 0{,}6c = 1{,}8 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Obliczenie prędkości względnej relatywistycznie:

$$v' \approx 0{,}55c = 1{,}52 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Stosunek wartości prędkości będzie malał.

ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Samochód przejechał trasę długości 84 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością większą o 12 km/h, to przejechałby te trasę w czasie o 21 minut krótszym.
   Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.
2. Pociąg o długości 120 m porusza się ruchem jednostajnym z prędkością 18 km/h. Jak długo pociąg będzie się znajdował na moście, którego długość wynosi 480 m?
3. Z miasta A do miasta B jadą motocykliści ze stałymi prędkościami. Jeden z nich ma prędkość o 8% większą od prędkości drugiego i czas przejazdu o 10 minut krótszy. Obliczyć czas przejazdu z A do B każdego z motocyklistów.
4. Ile czasu potrzebuje motocyklista jadący z prędkością 90 km/h na wyprzedzenie ciężarówki z przyczepą o łącznej długości 20 m, jadący z prędkością 84 km/h?
5. Prędkość samolotu lecącego z wiatrem wynosi 280 km/h. Gdy ten samolot leci pod wiatr, to jego prędkość wynosi 250 km/h. Jaka jest prędkość własna samolotu, a jaka prędkość wiatru?
6. Statek przepłynął z prądem rzeki, drogę z miasta A do miasta B w ciągu 8 godzin. Z powrotem przepłynął tę drogę w ciągu 10 godzin. Ile godzin będzie płynęła do B piłka rzucona do rzeki w mieście A?
7. Z miejscowości A wyjechał rowerzysta, a w ślad za nim, po upływie 1 godziny i 20 minut motocyklista. Po jakim czasie od chwili wyjazdu rowerzysty nastąpi spotkanie, jeżeli prędkość rowerzysty wynosi 15 km/h, a motocyklisty 45 km/h?
8. Dwaj turyści idą sobie naprzeciw z dwóch miejscowości A i B odległych o 30 km. Jeśli Pierwszy turysta wyruszy o 2 h wcześniej niż drugi, to spotkają się po upływie 2,5 h od chwili wyruszenia drugiego turysty. Jeśli zaś drugi turysta wyruszy o 2 h wcześniej niż pierwszy, to spotkają się po upływie 3 h od wyruszenia pierwszego turysty.
   Jaka jest średnia prędkość każdego turystów?
9. Piotr i Paweł ścigają się na 100 metrów. Piotr wygrywa o 10 metrów. Decydują się ścigać Jeszcze raz, ale tym razem, aby wyrównać szanse, Piotr startuje 10 metrów przed linią startu. Załóżmy, że obaj biegną z taką samą stałą prędkością, jak poprzednio. Kto wygra?
10. Oblicz wartość średniej prędkości motocyklisty na prostoliniowym odcinku drogi jeśli pierwszą połowę odcinka drogi przebył z średnią prędkością o wartości 40 km/h, a drugą połowę z prędkością o wartości 60 km/h.
11. Oblicz średnią szybkość pociągu, który połowę czasu podróży pomiędzy dwiema stacjami poruszał się z szybkością 80 km/h, a drugą połowę czasu z szybkością 60 km/h.

BIBLIOGRAFIA

1. Arkusze maturalne – www.cke.edu.pl
2. Matematyka 10/2009 Witold Bednarek: Zadania z prędkością.
3. Portal www.zadania.info